Algebra der gleichförmigen Bewegungen

Anwendung von linearen Funktionen / Gleichungen:

Bewegungsgleichungen

Textaufgaben,
die auch zu Gleichungssystemen führen

Die Beispiele dieses Textes gibt es als Aufgabenblatt 12186

Datei Nr. 12185

Friedrich Buckel

Stand 24. Dezember 2019

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Vorwort

In einer Zeit, in der man bestrebt ist, der Schulmathematik Anwendungen nahe zu bringen, zeige ich hier eine geradezu ideale Möglichkeit, sich anwendungsbezogen mit linearen Gleichungen bzw. linearen Funktionen zu beschäftigen. Nach der Behandlung der Geradengleichungen $y = mx + n$ und der linearen Funktionen, kann man sich den gleichförmigen Bewegungen zuwenden, vielleicht gekoppelt mit dem Physikunterricht, was natürlich die Sache spannender macht.

Dieser Text soll eine **Vorbereitung dazu** liefern, wie man dabei vorgehen kann: Es wird gezeigt, wie man die Weg-Zeit-Bewegungsgleichung aufstellt, mit der man dann die Positionen (= Wegmarken) zu bestimmten Zeitpunkten berechnet. Man wird lernen zwischen **Wegstrecken und Wegmarken** zu unterscheiden, und ebenso zwischen **Zeitpunkten und Zeitspannen**.

Eine Schwierigkeitssteigerung kommt hinzu, wenn man zwei Fahrzeuge betrachtet, die etwa gleichzeitig fahren, aber an verschiedenen Orten starten aber möglicherweise nicht gleichzeitig. Wie kann man dann deren Bewegungsgleichungen aufstellen, wie findet man heraus, wann sie sich begegnen und vor allem auch wo das passiert? Wenn es sich um zwei Fahrzeuge handelt, liegt ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor.

Lesen Sie bitte den Einführungstext dazu bis Seite 8 gründlich durch!

Wichtiger didaktischer Hinweis

Man kann natürlich solche Bewegungsaufgaben auch in der einfachen Form mit x und y darstellen, also y = 90x+10 als Bewegungsgleichung deuten. Doch dann vergibt man ein paar Chancen:

1. Man trainiert das Verständnis für die Funktionsschreibweise: s(t) bzw. s(10s) stellt doch mehr dar als nur y: Es ist der Weg als Funktion der Zeit, bzw. nach 20 Sekunden.
2. Die Verwendung von Maßeinheiten ist unverzichtbar: $s = v \cdot t = 5\frac{m}{s} \cdot 3s = 15m$. Dabei ist durch s = Sekunde gekürzt worden. Hätte man die falsche Formel $v = s \cdot t$ verwendet, könnte man an der Rechnung $v = s \cdot t = 5m \cdot 3s = 15\,ms$ erkennen, dass etwas nicht stimmen kann, den die Maßeinheit für v ist nicht ms sondern $\frac{m}{s}$.
3. Formeln haben viel Aussagekraft: Im Beispiel 2 von Seite 9 steht eine **Bewegungsgleichung für ein Fahrzeug B**: $\boxed{s_B(t) = 90\frac{km}{h} \cdot t + 10\,km}$. Setzt man t = 0 als ein, dann erfährt man, dass sich B bereits an der Wegmarke 10 km befindet.
   Das versteht man doch besser als die Gleichung $y = 90 \cdot x + 10$ ohne Einheiten.

Es ist wichtig, **Schüler nicht vom mathematischen Denken zu entlasten**, sondern sie zu mehr Gründlichkeit und Formalität anzuhalten. Gerade der Umgang mit Weg- oder Geschwindigkeits-funktionen ist ein einfaches Anwendungsbeispiel, mit dem man viel erreichen kann.

Inhalt

1	Gleichförmige Bewegungen – ein Hauch von Physik	3
2	Zeitpunkte und Zeitspannen, Wegmarken und Wegstrecken	4
3	Verwendung von Koordinatensystemen	6
4	Gleichzeitiger Start zweier Fahrzeuge	9
5	Start zweier Fahrzeuge zu verschiedenen Zeiten	11
6	Übungsaufgaben	17

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1 Gleichförmige Bewegungen - ein Hauch von Physik

Wir wollen hier nur die Bewegungen untersuchen, die der Physiker **gleichförmig** nennt. Im Alltag sagt man dazu: **Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit**. Doch was versteht man unter dem Begriff Geschwindigkeit? Das was der Fahrer am Tacho seines Autos abliest, ist die sogenannte Momentangeschwindigkeit, die sich während einer Fahrt laufend ändert, entweder, weil das Auto schneller wird, oder weil gebremst wird. Eine konstante Geschwindigkeit herzustellen, ist gar nicht so einfach. Selbst im Physikunterricht, wo man diese Bewegungen mit speziell dazu hergestellten Fahrbahnen untersucht, muss der Physiklehrer tricksen. Weil die Reibung immer eine Bremskraft erzeugt, muss man diese durch eine gleich große (schwache) Antriebkraft ausgleichen, etwa durch eine leicht geneigte Fahrbahn. So kann man es dann schaffen, dass das kleine Versuchsfahrzeug eine gleichförmige Bewegung ausführt.

Die Untersuchung dieser Bewegung geschieht dann dadurch, dass man zu bestimmten Fahrstrecken die Fahrzeiten stoppt. Dann gehen die Physiker so vor:

> Wenn in gleich langen Strecken immer dieselbe Fahrzeit benötigt wird, dann ist die Bewegung gleichförmig. Für eine doppelt so langen Strecke sollte es dann genau die doppelte Zeit benötigen, zu einer dreimal so langen Strecke die dreifache Zeit usw. Darin steckt das **Prinzip der Proportionalität**: Ist der Quotient aus zurückgelegter Strecke und der benötigten Zeit immer gleich groß, dann liegt eine gleichförmige Bewegung vor.

Physiker verwenden gerne vereinfachte Bezeichnungen, die wir so nicht gebrauchen können. Sie nennen die zurückgelegte Strecke in der Regel s, die benötigte Zeit t und den bei einer gleichförmigen Bewegung konstanten Wert des Bruches $\frac{s}{t}$ die Geschwindigkeit v:

Daraus ergeben sich die Formeln: $\boxed{v = \frac{s}{t}}$ (1) bzw. $\boxed{s = v \cdot t}$ (2)

Wendet man die Formel (1) auf nicht-gleichförmige Bewegungen an, dann berechnet man damit die **Durchschnittsgeschwindigkeit**. Darunter versteht man die Geschwindigkeit, die ein Fahrzeug hätte, wenn es die Strecke s in der Zeitspanne t gleichförmig zurücklegen würde.

Und nun das Problem: Um genau beschreiben zu können, wo ein Unfall stattgefunden hat oder wo eine Autobahnreparatur durchzuführen ist, hat man auf jeder Autobahn sogenannte Autobahn-Kilometer festgelegt. Das sind <u>Wegmarken</u> wie auf einer x-Achse, die jeder Stelle der Straße eine Zahl zuordnen. Wenn sich beispielsweise ein Stau entwickelt hat, der von der <u>Stelle</u> s_1 = 58 km bis s_2 = 65 km reicht, *dann wurde mit s nicht die Länge der Strecke beschrieben sondern zwei Stellen.* Die Länge der Strecke bezeichnet man besser mit Δs berechnet sie durch Subtraktion und schreibt:

$\boxed{\Delta s = s_2 - s_1} = 65\text{ km} - 58\text{ km} = 7\text{ km}$. Δs liest man „Delta s“, und man verwendet das große griechische D, weil es an „Differenz“ erinnern soll.

Die Formeln heißen dann $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ bzw. $\Delta s = v \cdot \Delta t$.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2 Zeitpunkte und Zeitspannen, Wegmarken und Wegstrecken

Ich zeige nun, warum man nur selten mit den Formeln $v = \frac{s}{t}$ und $s = v \cdot t$ arbeiten kann, und welche Formeln an deren Stelle geeigneter sind.

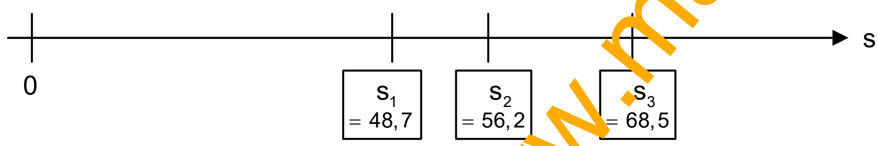
Beispiel 1

Die Autobahn A1 verbindet die Städte Hamburg und Bremen. Im Jahre 2011 wurde sie dreispurig ausgebaut. Dies geschah so, dass man sie abschnittsweise erneuert hat. Es gab also Strecken, die entweder noch im alten Zustand oder schon fertig waren.

Um diese Autobahnabschnitte beschreiben zu können, hat man eine Art Zahlenstrahl über die Autobahn gelegt. Irgendwo an einem Autobahnkreuz hinter Hamburg hat man die Wegmarke 0 definiert. Von da an wurde in Richtung Bremen gemessen. Damit konnte man Bauabschnitte beispielsweise so beschreiben:

Der 4. Bauabschnitt beginnt bei „Kilometer 48,7“ und endet bei „Kilometer 56,2.

In einem stark vereinfachten Schema sieht diese Situation des Jahres 2011 so aus:



Als erstes sollte man sich merken, dass ab jetzt mit s keine Strecken mehr bezeichnet werden sondern Wegmarken. Drei davon habe ich eingetragen.

Nun stelle ich die erste kleine Aufgabe:

Wie lange ist eigentlich dieser 4. Bauabschnitt?

Die Antwort erhält man durch Subtraktion der Wegmarken s_1 und s_2:

$$\boxed{\Delta s = s_2 - s_1} = 56,2\text{ km} - 48,7\text{ km} = 7,5\text{ km}$$

Die blau markierte Formel zeigt auch schon, wie man Streckenlängen bezeichnen kann:
Δs liest man „Delta s“. Dieses große griechische D soll an das Wort „Differenz“ erinnern.

Die Länge einer Strecke erhält man als Differenz der beiden Wegmarken.

Man sollte aber richtig subtrahieren: „Größere Wegmarke minus kleinere Wegmarke“, sonst erhält man eine negative Länge.

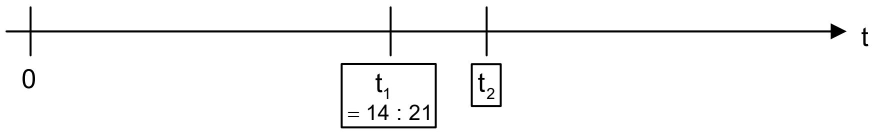
Im Anschluss an diesen 4. Bauabschnitt folgte eine bereits fertige Wegstrecke von s_2 bis s_3.
Sie hat die Länge $\boxed{\Delta s = s_3 - s_2} = 68,5\text{ km} - 56,2\text{ km} = 12,3\text{ km}$.

Nun die nächste kleine Aufgabe. Für den 4. Bauabschnitt gilt die Geschwindigkeitsbeschränkung $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Herr Fahrgut erreicht die Marke s_1, also den Beginn des 4. Bauabschnitts, zum Zeitpunkt t_1 = 14:21 Uhr. Er verhält sich vorbildlich und fährt genau mit der Geschwindigkeit $v = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wann (Zeitpunkt t_2) erreicht er das Ende dieses Bauabschnittes?

Demo-Text für www.mathe-cd.de

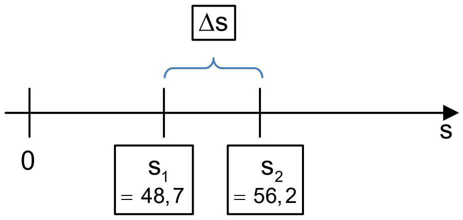
Man ahnt es schon: Die Zeitspanne zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 ist $\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$

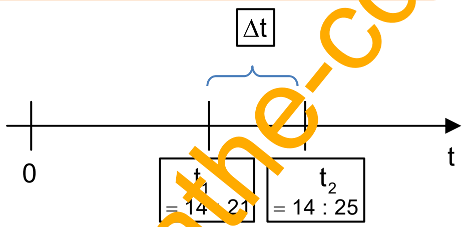


Man muss jetzt den Zusammenhang zwischen Wegmarken und Wegstrecke einerseits und Zeitpunkten und Zeitpannen andererseits begriffen haben.

Analog zu den Formeln zur Berechnung von Wegstrecken Δs aus den Wegmarken s

gibt es Formeln zur Berechnung von Zeitspannen Δt aus den Zeitpunkten t.





$\Delta s = s_2 - s_1$ $\Delta t = t_2 - t_1$

Nun formuliere ich unsere Aufgabe neu:

Herr Fahrgut durchfährt eine Strecke $\Delta s = 7{,}5\text{ km}$ mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie lange (Zeitspanne Δt) benötigt Herr Fahrgut zum Durchfahren dieser Strecke?

Lösung:

Dazu verwenden wir die Formeln der gleichförmigen Bewegung mit den Bezeichnungen Δs für Wegstrecke und Δt für Zeitspanne $\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$ (1) und $\boxed{\Delta s = v\Delta t}$ (2)

Da die Zeitspanne gesucht ist, stellt man die Formeln um: $\boxed{\Delta t = \frac{\Delta s}{v}}$ (3)

Daraus erhält man: $\boxed{\Delta t = \frac{7{,}5\text{ km}}{80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}09375\ \cancel{\text{km}} \cdot \frac{\text{h}}{\cancel{\text{km}}} \approx 0{,}09\text{ h} = 0{,}09\text{ h} \cdot 60\,\frac{\text{min}}{\text{h}} = 5{,}4\text{ min}}$

ACHTUNG: Bei der Verwendung der Einheiten entsteht der Doppelbruch $\frac{\text{km}}{\frac{\text{km}}{\text{h}}}$.

Man dividiert durch den Bruch $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Dann kürzt man km weg und es bleibt die Zeiteinheit „h“ übrig.

Und aus 0,09 h macht man 5,4 Minuten, indem man mit $60\frac{\text{min}}{\text{h}}$ multipliziert!

Wir wollen großzügig runden und annehmen, dass Herr Fahrgut nach 6 Minuten die Baustelle verlässt und somit um t_2 = 14:21 Uhr + 6 min =14:27 Uhr wieder schneller fahren kann.

Nun fährt er also die nächsten 12,3 km wieder mit 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie lange braucht er dazu?

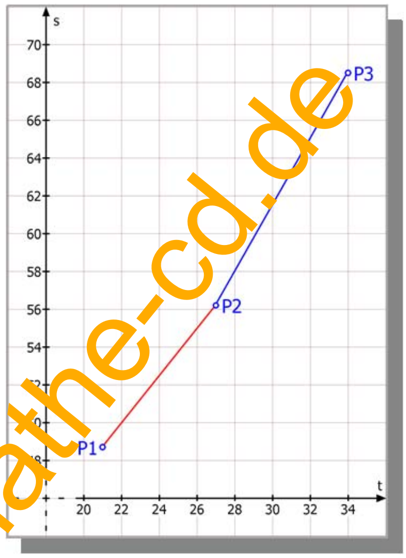
Aus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ folgt wie oben $\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{12{,}3\ \text{km}}{100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}123\text{ h}\left(\cdot 60\frac{\text{min}}{\text{h}}\right) = 7{,}38\text{ min} \approx 7\text{ min}$

Um t_3 = 14:27 Uhr + 7 min =14:34 Uhr erreicht er also den Bauabschnitt 5 und muss wieder langsamer fahren.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

3 Verwendung von Koordinatensystemen

Die Fahrt von Herrn Fahrgut von Hamburg nach Bremen kann man durch jeweils zwei Angaben beschreiben: Erstes durch die Wegmarken (Stellen) s, an der sich sein Auto gerade befindet und zweitens die Zeitpunkte (Uhrzeit) t, zu der er sich an der Wegmarke s befindet.



Wir haben drei Wegmarken in Abschnitt 2 berechnet, daraus bilde ich drei sogenannte Zustandspaare oder Zustandspunkte:

$$P_1\left(14:21\,\text{Uhr}\,|\,48{,}7\text{ km}\right)$$

$$P_2\left(14:27\text{ Uhr}\,|\,56{,}2\text{ km}\right)$$

$$P_3\left(14:34\text{ Uhr}\,|\,68{,}5\text{ km}\right)$$

Die x-Achse wird zur Zeitachse, deren Beschriftung die Fahrzeit (nur die Minuten) angibt.
Die y-Achse wurde zur Wegachse.

Wiederholung:

Die Steigung einer Geraden kann man aus zwei Punkten berechnen.

Im x-y-Koordinatensystem gibt es dafür die Formel $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Im s-t-Koordinatensystem (Weg-Zeit-Diagramm) lautet sie: $\boxed{m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v}$.

Vergleicht man diese mit der Formel für die Durchschnittsgeschwindigkeit, dann stellt man fest:

MERKE: **Im Weg-Zeit-Diagramm gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei Punkten die Steigung der Strecke an.**

Man erkennt also in unserem Bewegungsdiagramm, dass das Auto zwischen den Punkten P_1 und P_2 langsamer fährt als zwischen P_2 und P_3, denn die Steigung der Strecke P_1P_2 ist kleiner als die der Strecke P_2P_3.

Es gibt jedoch für die Erstellung solcher Koordinatensysteme ein Problem: *Wo liegt der Ursprung des Koordinatensystems?*
Die Sache mit der Zeitachse ist irgendwie „komisch". Es wurden nur die Minuten abgetragen. Demnach läge der Nullpunkt für die hier verwendete Zeitachse bei genau 14 Uhr. Dies ist ziemlich willkürlich. Aber im Grunde wissen wir auch nicht, wo der Nullpunkt für die Wegachse liegt, eben irgendwo auf der Autobahn, vielleicht bei einer Autobahnkreuzung. Für unsere Berechnungen war dies unwichtig. Im Grunde ist dies aber auch egal!

Demo-Text für www.mathe-cd.de

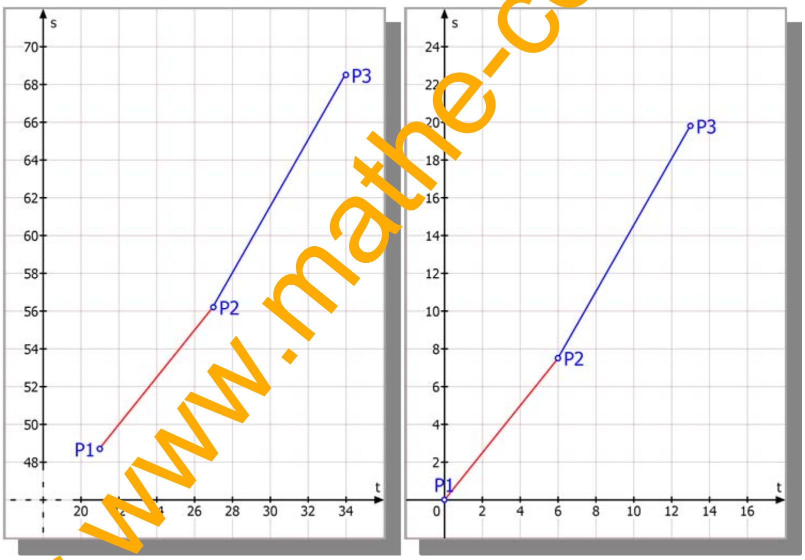
Die Strecken und die Zeitspannen ändern sich nicht, wenn man die Nullpunkte für Zeit und Weg an andere Stellen verlegt. Ja, dann kann man sie aber auch ganz günstig wählen, so dass Rechnung und Zeichnung etwas leichter werden.

Wenn es uns um diese beiden Strecken P_1P_2 und P_2P_3 geht, dann können wir doch den Ursprung des Koordinatensystems direkt nach P_1 legen. Dann ändern sich die Koordinaten wie folgt:

$s_1 = 0$:	$P_1(0\text{ min} \mid 0\text{ km})$
Fahrt von s_1 in $\Delta t = 6\text{ min}$ um $\Delta s = 7{,}5\text{ km}$ bis	$P_2(6\text{ min} \mid 7{,}5\text{ km})$
Fahrt von s_2 in $\Delta t = 7\text{ min}$ um $\Delta s = 12{,}3\text{ km}$ bis	$P_3(13\text{ min} \mid 19{,}8\text{ km})$

Jetzt sieht man beide Koordinatensysteme nebeneinander:
Links das „alte“ und rechts das „neue“.

Warum machen wir uns diese Mühe? Weil wir nun die Gleichungen dieser Geraden bzw. Strecken aufstellen wollen. Das wäre im alten Koordinatensystem kaum machbar gewesen. Jetzt ist es nicht mehr schwer.



Aufstellung der Gleichung der Fahrt von P_1 nach P_2:

Da die Gerade durch den Ursprung geht, liegt eine Ursprungsgerade vor. Diese hat im x-y-Achsenkreuz eine Gleichung der Form $\boxed{y = m \cdot x}$. Hier lautet sie: $s = m \cdot t$.
Und weil wir gelernt haben, dass die Steigung die Durchschnittsgeschwindigkeit ist, folgt:
$\boxed{s = v \cdot t}$ bzw. $\boxed{s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t}$. Achtung: Jetzt sind t Zeitpunkte und s Wegmarken!

Anwendung dieser Gleichung:

Wo befindet sich das Fahrzeug nach 2 Minuten? $s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{2}{60}\text{h} \approx 2{,}7\text{ km}$

Wo befindet es sich nach 12 Minuten? $s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{12}{60}\text{h} = 16\text{ km}$.

Die Frage nach dem „Wo“ zeigt schon, dass jetzt Stellen, Wegmarken berechnet werden. Nach zurückgelegten Wegstrecken würde man mit „Wie weit..“ fragen.

Aber halt, das ist nicht realistisch, denn nach 6 Minuten gibt Herr Fahrgut ja wieder mehr Gas und darf „100 fahren“. Also muss man auf den Gültigkeitsbereich der Gleichung achten.
Die Gleichung $s = 80\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$ gilt für $0 \le t \le 6\text{ min}$.

Hinweis: 1 Minute ist $\frac{1}{60}\text{h}$, also sind 2 Minuten $\frac{2}{60}\text{h}$ usw.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Aufstellung der Gleichung der Fahrt von P_2 nach P_3:

Jetzt liegt keine Ursprungsgerade mehr vor. Daher hat im x-y-Achsenkreuz diese „Gerade“ eine Gleichung der Form $\boxed{y = m \cdot x + n}$. Hier aber lautet sie: $\boxed{s = v \cdot t + n}$ (mit m = v!).

Da Herr Fahrgut auf diesem Teilstück mit $v = 100\frac{km}{h}$ fährt, haben wir:

die Bewegungsgleichung $\boxed{s = 100\frac{km}{h} \cdot t + n}$. (3)

Um n zu bestimmen, muss man einen der beiden Punkte einsetzen:

$P_2(6\text{ min} \,|\, 7{,}5\text{ km})$ eingesetzt ergibt: $\boxed{7{,}5\text{ km}} = 100\frac{km}{h} \cdot \boxed{\frac{6}{60}h} + n$

Umstellen: $7{,}5\text{ km} - 100\frac{km}{\cancel{h}} \cdot \underbrace{\frac{6}{60}}_{\frac{1}{10}} \cancel{h} = n$

Seiten vertauschen: $n = 7{,}5\text{ km} - \underbrace{100 \cdot \frac{1}{10}}_{10}\text{ km} = -2{,}5\text{ km}$

n in (3) einsetzen: $\boxed{s = 100\frac{km}{h} \cdot t - 2{,}5\text{ km}}$

Man vergleiche mit der Gleichung: $y = 100 \cdot x - 2{,}5$!

Anwendung dieser Gleichung:

Achtung: Diese Gleichung gilt nur für die Zeitspanne 6 min bis 13 min, obwohl die Zeit t für die ganze Fahrt gemessen wird, also ab t = 0 läuft, und da befand sich das Auto in P_1.

1. Frage: Wo ist das Auto zum Zeitpunkt t = 10 min?

$$s = 100\frac{km}{h} \cdot \boxed{\frac{10}{60}h} - 2{,}5\text{ km} \approx 14{,}2\text{ km}$$

Und wo ist es nach 15 Minuten? $s = 100\frac{km}{h} \cdot \boxed{\frac{15}{60}h} - 2{,}5\text{ km} \approx 22{,}5\text{ km}$

Ach ja, wir sind schon wieder übers Ziel hinausgeschossen, denn zum Zeitpunkt t = 13 min kommt das Auto ja in die nächste 80-er Zone. Ja, man muss aufpassen, sonst wird es teuer ☺.

Wir können aber auch Wegmarken berechnen und beispielsweise fragen:

2. Frage: Wann erreicht das Auto die Wegmarke s = 15 km?

Also wird für s 15 km eingesetzt: $\boxed{15\text{ km}} = 100\frac{km}{h} \cdot t - 2{,}5\text{ km}$

Umstellen nach t: $15\text{ km} + 2{,}5\text{ km} = 100\frac{km}{h} \cdot t$

$$100\frac{km}{h} \cdot t = 17{,}5\text{ km} \qquad |:100\frac{km}{h}$$

$$t = \frac{17{,}5\text{ km}}{100\frac{km}{h}} = 0{,}175\text{ h} = 0{,}175 \cdot 60\text{ min} \approx 10{,}5\text{ min.}$$

Wir sehen also:

> Die Weg-Zeit-Gleichung einer gleichförmigen Bewegung stellt eine lineare Funktion dar. Die erreichte Wegmarke ist ein Funktion der verstrichenen Zeit. Man kommt also zu linearen Gleichungen (wie $y = mx + n$), deren Schaubilder Geraden sind. Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Geraden.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

4 Gleichzeitiger Start zweier Fahrzeuge

Beispiel 2

Zwei Autos A und B starten zur selben Zeit an zwei verschiedenen Stellen einer Autobahn. Wir nehmen für unsere Aufgabe an, dass das Auto A mit der konstanten Geschwindigkeit $v_A = 130\,\frac{km}{h}$ fährt, und dass B mit $v_B = 90\frac{km}{h}$ startet, aber sich 10 km vor A befindet. Beide fahren in die gleiche Richtung.

a) Stelle die Bewegungsgleichungen für beide Fahrzeuge auf.

b) Berechne, wo sich die Fahrzeuge nach t_1 = 10 min und t_2 = 20 min befinden.

c) Wann hat A das Auto B eingeholt?

Lösung

Usw. auf CD!

Demo-Text für www.mathe-cd.de